CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Definição 5.1 – Distribuição uniforme discreta

Seja X *uma variável aleatória discreta com* $D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Diz-se que X *segue uma* distribuição uniforme nos n *pontos*

$x_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ se e só se, a função probabilidade é dada por:

$$f(x_j) = \frac{1}{n} \; (j = 1, 2, \cdots, n) \quad (5.1)$$

$$E(X) = \mu = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{1}{n}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \frac{1}{n}$$

$$E(X^k) = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^k . \frac{1}{n}$$

A distribuição é simétrica.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Dois casos particulares importantes:

1. $D = \{1,2,\cdots,n\}$. Ex: o modelo que descreve o lançamento de um dado "perfeito". $P(X = j) = 1/6 \quad (j = 1,2,\cdots,6)$

$$E(X) = \frac{1}{n}\left[n.\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2} \qquad E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

2. $D = \{0,1,2,\cdots,m\}$. Ex: modelo que descreve a obtenção ao acaso de um dos 10 dígitos.

$$E(X) = m/2$$

$$E(X^2) = \frac{m(2m+1)}{6}$$

$$Var(X) = \frac{m(m+2)}{12}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

5.3 - Distribuição de Bernoulli. Distribuição binomial.

Ex.1 As contas de uma empresa estão a ser auditadas por uma empresa de auditoria independente. A empresa tem 200 contas cliente activas, das quais 140 são contas atuais, 45 estão vencidas a 60 dias ou mais e 15 são incobráveis. A empresa de auditoria escolhe aleatoriamente cinco contas diferentes. Qual a probabilidade de uma dessas ser incobrável?

Ex. 2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que podem acomodar até oito passageiros. A companhia aérea determinou que a probabilidade de que um passageiro com bilhete não compareça para um vôo é de 0,2. Para cada vôo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores. A distribuição de probabilidades do número de bilhetes vendidos é conhecida. Admite-se independência entre as variáveis. Qual a probabilidade de se registar uma situação de "overbooking"?

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex.3: Um vendedor monta uma campanha promocional para um novo modelo de IPAD. Os compradores, se não ficarem satisfeitos, podem devolvê-los num prazo até 2 dias sendo totalmente reembolsados do custo dos mesmos. O custo do reembolso para o vendedor é de 100€. O vendedor estima que 15% dos compradores irão efectuar uma devolução. Supondo que são comprados 50 IPAD(s), qual a probabilidade do custo total associado à promoção ser inferior a 1000€? Qual a média e a variância do custo associado com a campanha?

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

5.3 - Distribuição de Bernoulli. Distribuição binomial

Prova de Bernoulli: Experiência aleatória em que se observa a realização ou não realização de determinado acontecimento A

A realização de *sucesso* (A) *acontece com probabilidade*

$$P(A) = \theta$$

a não realização (insucesso) $(\bar{A})$ *acontece com probabilidade*

$$P(\bar{A}) = 1 - \theta$$

Seja X *a variável aleatória que caracteriza a experiência descrita.*

Se ocorre um "sucesso" $X = 1$;

Se ocorre um "insucesso" $X = 0$;

Definição 5.2 – Distribuição de Bernoulli

Se a variável aleatória X *tem função probabilidade dada por*

$$f(x|\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x} \quad (x = 0{,}1) \quad 0 < \theta < 1 \ (5.2)$$

X *tem distribuição de Bernoulli. Simbolicamente,* $X \sim B(1, \theta)$.

$\boldsymbol{x}$:	0	1
$f_X(x)$:	$1-\theta$	θ

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x * f_X(x) = 0 * (1-\theta) + 1 * \theta = \theta;$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 * f_X(x) = 0^2 * (1-\theta) + 1^2 * \theta = \theta;$$

$$Var(X) = E(X^2) - \theta^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta) \quad (5.3)$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Seja uma **sucessão de provas de Bernoulli** **independentes**

Qual a probabilidade de, em ***n* provas de Bernoulli *independentes***, *se* obterem x *sucessos* $\{x = 0,1,2,\cdots,n\}$ *seja qual for a ordem em que estes são obtidos?*

$$\overset{\boldsymbol{x\ sucessos}}{\underbrace{\boldsymbol{A, A, \cdots, A}}_{\boldsymbol{x}}} \qquad\qquad \overset{\boldsymbol{n-x\ insucessos}}{\underbrace{\boldsymbol{\bar{A}, \bar{A}, \cdots, \bar{A}}}_{\boldsymbol{n-x}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}\left(\underbrace{\boldsymbol{A, A, \cdots, A}}_{\boldsymbol{x}}\underbrace{\boldsymbol{\bar{A}, \bar{A}, \cdots, \bar{A}}}_{\boldsymbol{n-x}}\right) = \underbrace{\boldsymbol{P(A)\cdots P(A)}}_{\boldsymbol{x}}\underbrace{\boldsymbol{P(\bar{A})\cdots P(\bar{A})}}_{\boldsymbol{n-x}}$$

$$= [\boldsymbol{P(A)}]^{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{1 - P(A)}]^{\boldsymbol{n-x}}$$

$$= \boldsymbol{\theta^{x}\ (1-\theta)^{n-x}}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}\left(\underbrace{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \cdots, \boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{x}}\, \underbrace{\overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{A}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x}}\right) = \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{x}}\ (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x}}$$

O número de conjuntos diferentes de $\boldsymbol{x}$ ***sucessos*** *e* $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{x}$ ***insucessos*** *é dado por* $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x}}$

A probabilidade de obter $\boldsymbol{x}$ ***sucessos*** *seguidos* ***de*** $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{x}$ ***insucessos qualquer que seja a sua ordem*** *será dada por:*

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{x}} (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x}}$$

(Esquema binomial)

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Definição 5.3 – Distribuição binomial

Se a variável aleatória X *tem função probabilidade,*

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \quad (x = 0, \dots, n) \quad 0 < \theta < 1 \qquad (5.5)$$

X *tem distribuição de Binomial. Simbolicamente,* $X \sim B(n, \theta)$

$P(X = 0) = (1-\theta)^n$, $P(X = 1) = n\theta(1-\theta)^{n-1}$,

$P(X = 2) = \binom{n}{2}\theta^2(1-\theta)^{n-2}$, $\cdots$, $P(X = n) = \theta^n$

são os termos sucessivos do desenvolvimento do binómio de Newton, pelo que

$$\sum_{x=0}^{n} f(x|\theta) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = [(1-\theta)+\theta]^n = 1$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- $\underbrace{X}_{nº\ sucessos} \sim B(n,\theta) \Rightarrow \underbrace{(n-X)}_{nº\ insucessos} \sim B(n, 1-\theta) \quad (5.7)$

- Momentos:

$$\mu_1' = E(X) = n\theta \quad (5.9)$$

$$\mu_2' = E(X^2) = n(n-1)\theta^2 + n\theta$$

$$\mu_2 = Var(X) = n(n-1)\theta^2 + n\theta - n^2\theta^2$$

$$= (n^2 - n)\theta^2 + n\theta - n^2\theta^2 = n^2\theta^2 - n\theta^2 + n\theta - n^2\theta^2$$

$$= -n\theta^2 + n\theta = n\theta(1-\theta) \ (5.11)$$

$$\gamma_1 = \frac{1-2\theta}{\sigma}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Relação entre a Binomial e a Bernoulli

  Se X_i é v.a. associada à i-ésima prova de Bernoulli, tem-se:

$$X_i \sim Bi(1,\theta) \Rightarrow Y = \sum_{x=1}^{n} X_i \sim B(n,\theta)$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Considere-se a experiência aleatória lançamento de uma moeda 4 vezes.

Seja X- nº vezes em que sai face nos 4 lançamentos$\Rightarrow X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$

Considere agora que se fazem mais 8 lançamentos da mesma moeda.

Seja Y- nº vezes em que sai face nos 8 lançamentos$\Rightarrow Y \sim B\left(8, \frac{1}{2}\right)$

Como a probabilidade de sucesso é a mesma pode-se considerar as duas experiências aleatórias em sequência

X e Y são variáveis aleatórias independentes por que se referem a sequências independentes

A variável $W = X + Y$- nº vezes em que sai face nos 12 lançamentos$\Rightarrow X \sim B\left(4 + 8, \frac{1}{2}\right)$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Soma de binomiais independentes com o mesmo parâmetro $\boldsymbol{\theta}$

Teorema 5.1 – Sejam $\boldsymbol{Y_1}$ *e* $\boldsymbol{Y_2}$ *duas variáveis aleatórias independentes. Então,*

$Y_1 \sim B(n_1, \theta)$ ***e*** $Y_2 \sim B(n_2, \theta) \Rightarrow Y_1 + Y_2 \sim B(n_1 + n_2, \theta)$ ***(5.12)***

1. Seja X uma v.a. tal que $X \sim B(7, 0.3)$. Calcule:

a) $P(X = 5)$ b) $P(X < 3)$ c) $P(X \leq 4)$ d) $P(X > 2)$ e) $P(X \geq 1)$

2. Sejam as v.a.(s) $X_1 \sim B(5, 0.3)$ e $X_2 \sim B(2, 0.3)$

   a) Calcule: $P(X_1 + X_2 \leq 2)$

   b) Calcule a mesma probabilidade no caso de $X_2 \sim B(2, 0.5)$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL
A. Função probabilidade

		θ									
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL
B. Função de distribuição

		θ									
n	***x***	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
7	**0**	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	5	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex.1 As contas de uma empresa estão a ser auditadas por uma empresa de auditoria independente. A empresa tem 200 contas cliente activas, das quais 140 são contas atuais, 50 estão vencidas a 60 dias ou mais e 10 são incobráveis. A empresa de auditoria escolhe aleatoriamente sete contas diferentes.

a) Qual a probabilidade de uma dessas ser incobrável?

X −número de contas incobráveis em 7 $\sim B\left(7, \theta = \overbrace{10/200}^{0.05}\right)$

$P(X = 1) = 0,2573$

b) Qual a probabilidade de existirem 3 ou mais incobráveis?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_x(3 - 0) = 1 - 0,9962$$

c) Qual a probabilidade de existirem menos de 5 não incobráveis?

Y −número de contas não incobráveis $\Rightarrow Y = n - X \sim B\left(7, \overbrace{1 - \theta}^{0.95}\right)$

$$P(Y < 5) = P(n - X < 5) = P(-X < 5 - n) = P(X > n - 5)$$

$$= P(X > 7 - 5) = P(X > 2)$$

Ex2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que **podem acomodar até oito passageiros**. A companhia aérea determinou que a probabilidade de que um passageiro com bilhete não comparecer para um vôo é de 0,2. Para cada vôo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores. A distribuição de probabilidades do número de bilhetes vendidos é conhecida. Admite-se independência entre as variáveis. Qual a probabilidade de se registar uma situação de “overbooking”?

$X -$ número de passageiros, em 10, que não comparecem ao vôo

$X \sim B(10; 0{,}2)$

$Y -$ número de passageiros que compraram bilhete

Y	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$f_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05

$$P(overbooking) = P(X = 0, Y = 9) + P(X = 0, Y = 10) + \\ + P(X = 1, Y = 10)$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

5.6 Distribuição de **Poisson**

Esta distribuição é particularmente útil na resolução de filas de espera que é um problema de gestão importante para empresas que servem clientes que pertencem a grandes populações (meios de transporte, supermercados, farmácias, bancos,…).

Com efeito uma fila de espera longa pode afastar clientes, mas se existirem demasiadas caixas a empresa corre o risco de ter empregados sem trabalho.

O conhecimento da probabilidade de existir um certo número de clientes em fila pode ajudar a empresa a encontrar um *trade-off* entre filas demasiado longas e empregados ociosos.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

A distribuição de **Poisson** foi proposta por Simeon Poisson (1781- 1840). É uma distribuição importante e com aplicação a um grande número de problemas como por exemplo:

- Número de falhas diárias num sistema de computadores;
- Número de defeitos numa peça de fazenda com 100 metros;
- Número de defeitos por metro num fio electrico;
- Número de sementes, num talhão de 1 m^2, que germinam quando se lançam sementes para um campo;
- Número de encomendas recebidas mensalmente por uma empresa.

Poisson é a distribuição de variáveis aleatórias que representam a contagem do número de ocorrências num dado intervalo **contínuo** (tempo, área, comprimento,…) e **limitado**.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex. 1: Os clientes chegam a uma agência bancária, a uma taxa de 4 por minuto. Na sua publicidade, o banco sublinha que os clientes serão prontamente atendidos, com pouca ou nenhuma espera. Se os funcionários existentes no banco conseguem atender até 20 clientes em 5 minutos, acha que o banco deverá aumentar o número de funcionários?

Ex2: Uma empresa têxtil, produz um certo tipo de tecido para exportação. Cada encomenda consiste numa peça com $500m^2$. A empresa garante que o nº de falhas é, em média, de uma por cada $100m^2$, e aceita a devolução das encomendas sem custo para o comprador se o número de falhas por encomenda for superior a 4. Aconselharia a empresa a manter esta política?

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Assuma que um intervalo é dividido num grande número de sub-intervalos de igual amplitude (Δt *arbitrariamente pequena*) de tal modo que a probabilidade de ocorrência de um acontecimento em qualquer dos sub-intervalos é muito pequena.

Definição 5.7 Processo de Poisson

1. **O número de eventos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes**, ié, a ocorrência de um evento num intervalo não afecta a probabilidade de ocorrência de um evento em qualquer outro intervalo;

2. **Não pode ocorrer mais de um evento em cada intervalo –** a probabilidade de ocorrerem dois ou mais eventos em qualquer intervalo de amplitude Δt *é aproximadamente igual a zero.*

3. **A probabilidade de ocorrer exactamente um evento em qualquer intervalo de amplitude Δt *é aproximadamente* $\lambda\Delta t$** *e é constante para todos os sub intervalos;*

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Seja a v.a. X*:* contagem do número de eventos num intervalo unitário (uma hora, um mês, um ano, etc.) numa experiência que verifica os pressupostos do processo de Poisson.
- Para obter a função probabilidade de X *divide-se este intervalo em* n *partes com* n suficientemente grande para que cada sub-intervalo tenha uma amplitude $\Delta t = 1/n$ arbitrariamente pequena.
- Por hipótese, é praticamente impossível que ocorram dois ou mais eventos em cada sub-intervalo, então X *pode ser bem aproximado pelo número de sucessos em* n provas de Bernoulli independentes, a probabilidade de um sucesso é $\lambda \Delta t$.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Esquema:

0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

0 Δt 1

Sabe-se que a função probabilidade da distribuição binomial é:

$$f_X(x) \approx \binom{n}{x} (\lambda \Delta t)^x (1 - \lambda \Delta t)^{n-x}$$

Fazendo $\Delta t = \frac{1}{n}$ e $n \to \infty$ vem:

$$P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{(n-x)}$$

$$P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$P(X = x) = 1.\frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- **Processo de Poisson e distribuição de Poisson**

Num **processo de Poisson,** em que os acontecimentos ocorrem a uma **taxa média de** λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude Δt *tem distribuição de Poisson de parâmetro* $\lambda\Delta t$.

Definição 5.8 – Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X *com função probabilidade,*

$$f(x|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad (x = 0,1,2,\cdots) \quad \lambda > 0 \qquad (5.33)$$

diz-se que tem distribuição de Poisson. Simbolicamente, $X \sim Po(\lambda)$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} . e^{\lambda} = 1$$

Nota:
$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ é o desenvolvimento em série de e^{λ}

Função geradora de momentos:

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{sX} . e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda(e^s - 1)} \quad (5.33)$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Momentos: $M_X(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$

$$M'(s) = e^{-\lambda}.\lambda.e^s.e^{\lambda e^s} = \lambda.e^{-\lambda}.e^{s+\lambda e^s}$$

$$\Rightarrow E(X) = M'(0) = \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda$$

$$M''(s) = \lambda.e^{-\lambda}(1 + \lambda e^s)e^{s+\lambda e^s}$$

$$\Rightarrow M''(0) = \lambda.e^{-\lambda}(1 + \lambda e^0)e^{0+\lambda e^0} = \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda} + \lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda}$$

$$M''(0) = E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \; (5.37) \qquad \gamma_1 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- Soma de Poisson independentes

Teorema 4.6 – Sejam $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ ***e*** $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ ***duas variáveis aleatórias independentes. Então,***

$$X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad \textbf{\textit{(4.63)}}$$

- Tabelas da Poisson → Tabela 2, para λ = 0.1,0.2,...,10,11,..., 20.

A. Função probabilidade

$$f(x \mid \lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

B. Função de distribuição

$$F(x \mid \lambda) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i}}{i!}$$

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex. 1: Os clientes chegam a uma agência bancária de grande movimento, a uma taxa de 4 por minuto. Na sua publicidade, o banco sublinha que os clientes serão prontamente atendidos, com pouca ou nenhuma espera. Pressupostos para que se possa tratar o número de clientes atendidos por minuto como uma variável com distribuição de Poisson?

1. A chegada de clientes num certo intervalo de tempo não influencia a chegada de clientes em qualquer outro intervalo disjunto;

2. A probabilidade de chegarem dois ou mais clientes em qualquer intervalo de amplitude Δt *arbitrariamente pequeno é aproximada-mente igual a zero.*

3. As chegadas são susceptíveis de ocorrer com igual probabilidade em qualquer intervalo de tempo*;*

Se a garantia do banco for de que os funcionários existentes no banco conseguem atender 20 clientes em 4 minutos, acha que o banco deverá aumentar o número de funcionários?

$X - nº\ clientes\ atendidos\ por\ minuto \sim Po(4)$

$Y - nº\ clientes\ atendidos\ em\ 4\ minutos \sim Po(16)$

$P(Y = 20) = 0.06$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex2: Uma empresa têxtil, produz um certo tipo de tecido para exportação. Cada encomenda consiste numa peça com $500m^2$. A empresa garante que o nº de falhas é, em média, de uma por cada $100m^2$, e aceita a devolução das encomendas sem custo para o comprador se o número de falhas por encomenda for superior a 4. Aconselharia a empresa a manter esta política?

Pressupostos para que se possa tratar o número de falhas em cada $100m^2$como uma variável com distribuição de Poisson?

1. A ocorrência de falhas em qualquer pedaço do tecido não influencia a ocorrência de falhas em quaisquer outros pedaços;

2. A probabilidade de ocorrência de duas ou mais falhas em qualquer pedaço *arbitrariamente pequeno é aproximadamente igual a zero.*

3. As falhas são susceptíveis de ocorrer com igual probabilidade em quaisquer pedaços de tecido*;*

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

A empresa garante que o nº de falhas é, em média, de uma por cada $100m^2$, e aceita a devolução das encomendas sem custo para o comprador se o número de falhas por encomenda for superior a 4. Aconselharia a empresa a manter esta política?

$X - nº\ falhas\ por\ 100m^2 \sim Po(1)$

$Y - nº\ falhas\ em\ 500m^2 \sim Po(5)$

$P(Y > 4) = 0.4405$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Exemplo 4.20 – Numa fábrica de têxteis existem numerosos teares do mesmo tipo. Concluiu-se que o número de teares que se avariam em cada mês é uma variável aleatória $X \sim Po(2)$.

Calcule:

a) Probabilidade de durante um mês se avariarem sete ou mais teares.

b) Determinar a capacidade mensal máxima disponível *C da oficina de reparação, de* modo a ser pelo menos 0.9 a probabilidade de não haver teares aguardando reparação.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex3: Uma empresa construtora de *chips* deu instruções ao seu estatístico para investigar as características do seu novo *chip* com 4 megabytes de memória, com vista a definir a garantia a dar, sobre o produto, a potenciais clientes. O estatístico sabe que cada lote contem 10000 *chips* e que a probabilidade de *chips* defeituosos na produção total da empresa é de 0.1%. Suponha que é o estatístico da empresa, como procederia?

X- número de *chips* defeituosos por lote$\sim B(10000; 0{,}001)$

$$P(X \leq x) = \binom{10000}{x} 0{,}001^{x} (1 - 0{,}001)^{\,10000-x} \quad x = 0, \cdots 10000$$

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

- **Aproximação da Binomial à Poisson**

Lei dos Acontecimentos raros

Seja $\theta = \lambda / n$, *quando* $n \to \infty, \theta \to 0$, ***mantendo-se*** $\boldsymbol{n\theta}$ ***constante***, *a distribuição binomial de parâmetros* (n, θ) *tende para uma distribuição de Poisson de parâmetro* $\lambda = n.\theta$

$$P(X = x) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

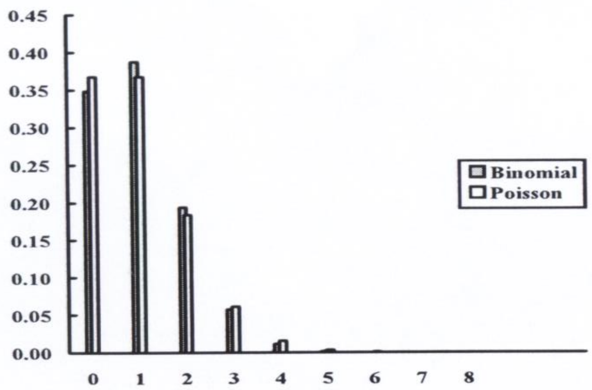
$$= \lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= e^{-n\frac{\lambda}{n}} \cdot \frac{\left(n\frac{\lambda}{n}\right)^x}{x!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

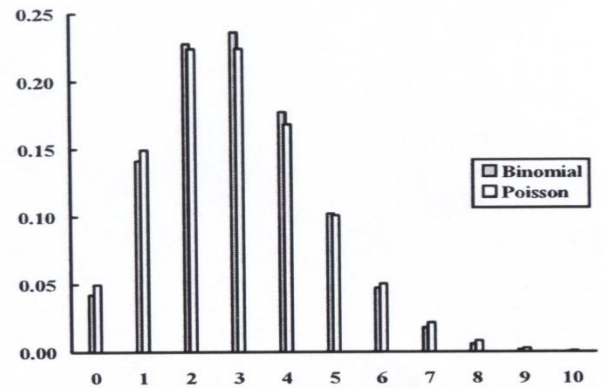
Não é aconselhável fazer a aproximação quando:

$$\mathbf{0.1 < \boldsymbol{\theta} < 0.9} \quad \textbf{e\textbackslash ou} \; \boldsymbol{n} \leq \mathbf{20}$$

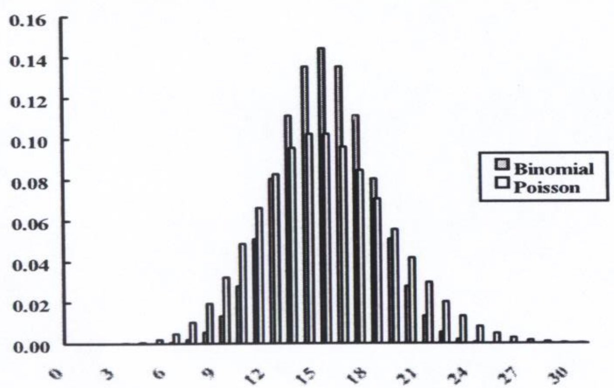
CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS



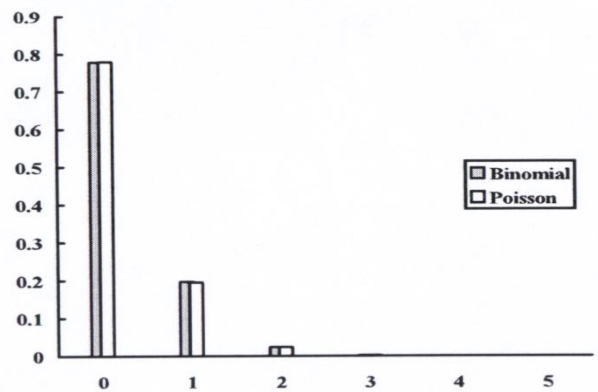
B(10;0.1) *versus* Po(1)



B(30;0.1) *versus* Po(3)



B(30;0.5) *versus* Po(15)



B(25;0.01) *versus* Po(0.25)

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ex3: Uma empresa construtora de *chips* deu instruções ao seu estatístico para investigar as características do seu novo com 4 megabytes de memória, com vista a definir a garantia a dar, sobre o produto, a potenciais clientes. O estatístico sabe que cada lote contem 10000 *chips* e que a probabilidade de *chips* defeituosos na produção total da empresa é de 0.1%. Suponha que é o estatístico da empresa, como procederia?

X- número de *chips* defeituosos por lote$\sim B(10000; 0{,}001)$

$$P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \binom{10000}{x_i} 0{,}001^{x_i} (1-0{,}001)^{\;10000-x_i} \; x_i = 0, \cdots, 10000$$

Fazendo a passagem da Binomial à Poisson, tem-se $X \dot{\sim} Po\left(\underbrace{10000 * 0{,}001}_{10}\right)$.

A definição da garantia passa por um estudo da probabilidade de ter, no máximo, um certo número de *chips* defeituosos por lote.

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F_X	0,003	0,010	0,029	0,067	0,130	0,220	0,333	0,458	0,583

Exemplo 4.21 – Sabendo que $\theta = 0.001$ é a probabilidade *de uma peça, produzida* por certa máquina, ser defeituosa, qual a probabilidade de, num lote de 1000 peças haver uma ou mais defeituosas?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \binom{1000}{0}(0.001)^0(0.999)^{1000}$$
$$= 1 - 0.3677 = 0.3623$$

$$X \sim Po(1) \Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.3679 = 0.3621$$

Se em vez de 1000 peças forem observadas 2000 peças, vem,

$$X \sim Po(2) \Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.1353 = 0.8647$$

Nota: o resultado (4.64) só é válido quando $\lambda = n\,.\,\theta$ se mantém fixo. *Neste caso, o cálculo de $P(X \geq 1)$ é feito com $\lambda = 1$ e* $\lambda = 2$, i.é, $n\,.\,\theta$ não se manteve fixo.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Exerc. 16

Num lote de 500 peças existem 50 defeituosas. Rejeita-se o lote se numa amostra existirem mais de 2 defeituosas.

a) Se a amostra for de dimensão 10, qual a probabilidade de se rejeitar o lote.
b) Se numa amostra existirem mais de 2 peças defeituosas, determine a dimensão máxima da amostra de forma que a probabilidade de rejeição do lote seja inferior a 5%.

Exerc. 20

Sabe-se que 1% dos parafusos fabricados são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com garantia de devolução do valor pago caso existam 2 ou mais def.(s).

a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução
b) Se se comprar 10 caixas qual a probabilidade de haver devoluções?

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Exerc. 30

O número de pessoas que acorrem a certo serviço segue um processo de Poisson com taxa média de 15 por dia. O serviço funciona das 10 às 16 e atende no máximo 25 pessoas \dia.

a)Qual a probabilidade de entre as 10 e as 12 horas chegarem menos de 5 pessoas?

b) Qual a probabilidade de num dia a primeira pessoa chegar depois das 12?

c) Qual a proporção de dias em que ficam pessoas por atender?

Exerc. 34

Um circuito integrado tem 1000 transístores. A probabilidade de Um transístor ter defeito é 0.0012.

a) Qual a probabilidade de um circuito integrado ter no máximo 2 transístores com defeito?